昭和60年度産業研究所特別研究「恒星の内部構造及び進化を規定する準線型双曲型発展方程式の解の存在と構造にかんする基礎理論の研究」研究報告

ニュートン理論におけるある種の星の模型にたいする(M, R)－ダイアグラムのスパイラル構造について

On the spiral structure of the (M, R)－diagram fo a certain class of stellar models in Newtonian theory.

牧　野　　哲※

Tetu　Makino

Abstract

We study the (M, R)－diagram of the stellar model described by the Newtonian equation of hydrostatic equilibrium of self-gravitating barotropic gas in spherical symmetry. This article provides a mathematically rigorous proof of the fact if the equation of state satisfies suitable conditions, which are similar to that of neutron stars, the radius $R(\varepsilon)$ and the total mass $M(\varepsilon)$ of the stellar model with central density $1/\varepsilon$ tends to limits R_S, M_S spirally in the (R, M)－plane as $\varepsilon \to +0$.

序

中性子星の模型にかんする数値計算の結果は、しばしば星の半径Rと総質量Mとの間のスパイラル状の相関図で図示されることが多い（たとえば、〔5〕、P. 623、Figure 24. 2. の Harrison, Thorne, Wakano and Wheeler による図など）。このばあい、力学的な基礎方程式は、相対論によるいわゆるTolman－Oppenheimer－Volkoff方程式に基づくものであるため、あたかもこのM－R図のスパイラル状の構造が相対論に由来するかのように誤解される場合がある。しかし、本稿に示すように、ニュートン力学の基礎方程式に依っても、中性子星の模型の場合と類似の状態方程式を仮定すれば、それは数学的に厳密に再現できるのである。（〔6〕参照）

本稿の目的は、そのことを示すことにある。これは、恒星の内部構造の研究としては、あくまでも静水力学的な平衡状態にかんするものであり、これをあるパラメーターに従って一連のものとしてとらえることによる安定性の議論にまで立ち入ることはできなかった。本特別研究の目的は、星の内部構造の発展の数学的理論の開発にあったのであるから、本稿の目的はその第一歩としての基礎を与えたにすぎない。本稿で得られた模型を発展方程式の定常

＊ 大阪産業大学教養部

解の系としてとらえてその安定性を論じることは、今後の課題である。

特別研究費を支給して本研究を全面的に援助して下さった大阪産業大学産業研究所に感謝する。

1．問題の出所と主な結果

球対称星の内部構造は次の方程式系で記述される。

$$(1,1)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial \rho}{\partial t}+\dfrac{\partial}{\partial r}(\rho v)+\dfrac{2}{r}\rho v=0 \\ \rho\left(\dfrac{\partial v}{\partial t}+v\dfrac{\partial v}{\partial r}\right)+\dfrac{\partial p}{\partial r}=g \\ -\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial r}r^2 g=4\pi G\rho \end{cases}$$

ここでrは星の中心からの距離、ρは密度、pは圧力、vは気体の速度、gは重力（符号は負)、Gは万有引力定数、tは時間である。時間的に動くことのない平衡に達した星は、したがって、

$$(1,2)\quad \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\frac{r^2}{\rho}\frac{dp}{dr}=4\pi G\rho$$

で記述される。いま星の各部分が同一の状態

方程式

$$(1,3)\quad p=p(\rho)$$

をみたすとして、(1，2)，(1，3）を解いて星の内部構造を調べることにする。

関数$p=p(\rho)$にたいしては、とりあえず次の仮定をおく。

(A_1) $\rho \geqq 0$にたいしてpは連続で、$\rho=0$で$p=0$，$\rho>0$にたいして$p>0$で、充分に滑らか。

(A_2) 積分

$$(1,4)\quad u=\int_0^\rho \frac{dp}{\rho}$$

は有限であり、かつp/ρも$\rho\to+0$のとき有限である。このとき

$$(1,5)\quad \bar{u}=u-\frac{p}{\rho}$$

を内部エネルギーとよぶ。

以上の仮定のもとで、初期条件

$$(1,6)\quad \rho=1/\varepsilon \qquad (r=+0)$$

をみたす（1，2)、(1，3）の解を考える。この初期値問題は、適当な枠のもとで一意解$\rho=\rho(r,\ \varepsilon)$をもち、ある$r=R(\varepsilon)\leqq+\infty$で$\rho=0$となるまで、$r$について単調減少である。一般には$R(\varepsilon)$は有限とは限らないが、T. Makino〔4〕によれば、仮定

$$(A_3)\quad \int_{+0}\rho u^{\frac{-2(n-1)}{n-2}}du=+\infty$$

をつけくわえれば、必ず$R(\varepsilon)<+\infty$となる。以下、この仮定をつけくわえることとし、$R(\varepsilon)$を考えている星の半径とよぶ。この解から

$$(1,7)\qquad M(\varepsilon)=4\pi\int_0^{R(\varepsilon)}\rho\,(r,\varepsilon)r^2dr$$

によって、量の総質量$M(\varepsilon)$を算出することができる。さらに総エネルギ$E(\varepsilon)$を

$$E=4\pi\int_0^R(\bar{u}\rho+\frac{1}{2}\phi\rho)r^2dr$$

ただし

$$\phi\,(r)=-4\pi G\int_0^R K(r,s)\rho\,(s)s^2ds$$

$$K(r,s)=\begin{cases}\dfrac{1}{r}(s\leqq r)\\ \dfrac{1}{s}(r\leqq s)\end{cases}$$

で定義する。第一項が熱エネルギー、第二項が重力エネルギーを表わすことはいうまでもない。

われわれは、$\varepsilon\to+0$のときの$\rho\,(r,\varepsilon)$の挙動の研究を通じて、$R(\varepsilon)$、$M(\varepsilon)$、$E(\varepsilon)$の挙動をしらべる。とくに、状態方程式が高密度部分で等温方程式に近い場合を考えるために、次のような仮定をおく、

(A_4)　断熱指数γを

$$(1,8)\qquad \gamma=\frac{\rho}{p}\frac{dp}{d\rho}$$

で定義するとき、γは充分大きなρにたいして正であり、$\rho\to+\infty$のとき

$$(1,9)\qquad \int^{+\infty}|\gamma-\gamma_0|\frac{d\rho}{\rho}<+\infty$$

をみたす極限値γ_0をもつ。

この仮定のもとで、次の結論が得られる。

もし、$1\leqq\gamma_0<6/5$ ならば、半径$R(\varepsilon)$、総質量$M(\varepsilon)$、総エネルギー$E(\varepsilon)$は、中心密度$1/\varepsilon\to+\infty$ のとき、次のような漸近挙動を示す：

$$(1,10)\qquad \begin{aligned}R(\varepsilon)&=R_s+R_1(\varepsilon)\varepsilon^{\mu}\cos\,(\nu\log\varepsilon+\theta_1(\varepsilon))+O(\varepsilon^{2\mu}),\\ M(\varepsilon)&=M_s+M_1(\varepsilon)\varepsilon^{\mu}\cos\,(\nu\log\varepsilon+\theta_2(\varepsilon))+O(\varepsilon^{2\mu}),\\ E(\varepsilon)&=E_s-G\frac{M_s}{R_s}(M(\varepsilon)-M_s)+O(\varepsilon^{2\mu}|\log\varepsilon\,|)\end{aligned}$$

ただし

$$(1,11)\qquad \mu=\frac{6-5\gamma_0}{4}$$

$$\nu=\frac{2-\gamma_0}{4}\sqrt{7-8\frac{\gamma_0-1}{2-\gamma_0}-16\left(\frac{\gamma_0-1}{2-\gamma_0}\right)^2}$$

であり、R_s、M_s、E_sはいづれも有限の数であって、

$$(1,12)\qquad \rho=\mathrm{Const.}\ r^{-\frac{2}{2-\gamma_0}}(1+o(1))\ (r\to0)$$

のような漸近挙動を示す原点で特異な解 $\rho=\rho_s(r)$ が存在して、その半径、質量、エネルギーである。また、$R_1(\varepsilon)$、$M_1(\varepsilon)$、$\theta_1(\varepsilon)$、$\theta_2(\varepsilon)$はいずれも、充分小さなεにたい

して$\varepsilon=0$　もこめて連続な定数で、

$$R_1(0)>0,\quad M_1(0)>0$$

である。

2．問題設定

事情のつながりをみやすくするために、以下、基礎方程式を次の形式に書く

$$\frac{d^2u}{dr^2}+\frac{n-1}{r}\frac{du}{dr}+\lambda f(u)=0 \tag{2,1}$$

（1，2）をこの形に変換するには、(1，4)によって定義されたuを従属変数におき、$n=3$、$\lambda=4\pi G$，$f(u)=\rho$ とおけばよい。ここでは、もっと一般に次の仮定をおく。

（F_0）　$2<n$，$\lambda>0$，

（F_1）　$f(u)$ は$|u|<+\infty$ で連続で、$u>0$ にたいしては$f(u)>0$ で充分滑らか、また、$u\leqq 0$ では$f(u)=0$。

初期値問題

$$\frac{d^2u}{dr^2}+\frac{n-1}{r}\frac{du}{dr}+\lambda f(u)=0 \tag{2,1}$$

$$u(0)=A(>0) \tag{2,2}$$

の解の一意性について考える。このとき、

命題1． $u=u(r)\in C^2(0,\delta]\cap C[0,\delta]$ が（2，1）の解ならば、その積分方程式

$$u(r)=u(0)-\lambda\int_0^r K(r,s)f(u(s))s^{n-1}ds, \tag{2,3}$$

$$K(r,s)=\frac{1}{n-2}\left(\frac{1}{s^{n-2}}-\frac{1}{r^{n-2}}\right)$$

の解であって、$C^2[0,\delta]$ に属す。さらに$u(0)=A$ならば、$r\to+0$ において、次の漸近挙動を示す。

$$u=A-\frac{\lambda f(A)}{2n}r^2+\frac{\lambda^2 f(A)f'(A)}{8n(n+2)}r^4+o(r^4) \tag{2,4}$$

$$\frac{du}{dr}=-\frac{\lambda f(A)}{n}r+\frac{\lambda^2 f(A)f'(A)}{2n(n+2)}r^3+o(r^3)$$

証明　$u(r)\in C^0(0,\delta]\cap L^\infty[0,\delta]$ を積分方程式（2，3）の右辺に代入したものを$\tilde{u}(r)$とする。$\tilde{u}(r)$じしん$C^2(0,\delta)\cap C^1[0,\delta]$ に属して、線型方程式

$$\frac{d^2\tilde{u}}{dr^2}+\frac{n-1}{r}\frac{d\tilde{u}}{dr}+\lambda f(u(r))=0$$

の解であることが容易に確められる。$u(r)$もそうであるから、

$$u(r)=\tilde{u}(r)+\frac{C_1}{r^{n-1}}+C_2$$

となる定数C_1，C_2があるはずである。しかし、$u\in L^\infty[0,\delta]$ だから、$C_1=0$ のはずである。ゆえに、$u(r)\in C^1[0,\delta]$ で、$u(0)\in C^2$ である。すなわち、（2，3）の解である。$u(r)\in C[0,\delta]$ より、$\tilde{u}(r)=u(r)\in C^2[0,\delta]$ が従う。また、漸近挙動（2，4）は、次のようにして計算できる。

まず、

$$u(r)-A=-\lambda\int_0^r K(r,s)f(u(s))s^{n-1}ds$$
$$=O\left(\int_0^r K(r,s)s^{n-1}ds\right)=O(r^2),$$

ゆえに

$$u(r)-A=-\lambda\int_0^r K(r,s)[f(A)+f(u(s))-f(u(A))]s^{n-1}ds$$
$$=-\lambda f(A)\int_0^r K(r,s)s^{n-1}ds+O\left(\int_0^r K(r,s)s^2s^{n-1}ds\right)$$
$$=-\frac{\lambda f(A)}{2n}r^2+O(r^4),$$

また、

$$u'(r)=-\lambda\int_0^r\frac{\partial}{\partial r}K(r,s)f(u(s))s^{n-1}ds$$
$$=-\frac{\lambda}{r^{n-1}}\int_0^r f(u(s))s^{n-1}ds$$
$$=-\frac{\lambda}{r^{n-1}}\int_0^r[f(A)+f'(A)(u(s)-A)+O(s^2)]s^{n-1}ds$$
$$=-\frac{\lambda}{r^{n-1}}\left[\frac{f(A)}{n}r^n-\frac{\lambda f'(A)f(A)r^{n+1}}{2n(n+2)}+O(r^{n+1})\right]$$

等々。証明終り。

$u=A>0$ の近傍で $f(u)$ は滑らかと仮定しているので、積分方程式（2，3）の解は、$u(0)=A$ を与えるごとに一意である。ゆえに、

命題2　初期値問題（2，1），（2，2）は、$C^2(0,\delta]\cap C[0,\delta]$ の範囲で一意に存在する、ここに δ は充分小さな正の数。

（2，1），（2，2）の一意解 $u=u(r,A)$ を右に延張する。このとき、次の仮定をおけば、解は必ず、有限の $r=r(A)$ で最初の（そして最後の）零点をもつ。

$$(F_2)\qquad \int_{+0}f(u)u^{-\frac{2(n-1)}{n-2}}du=+\infty$$

すなわち

命題3　ある $r(A)$ があって、$u(r,A)$ は $0<r<r(A)$ で真に単調減少、$u(r(A),A)=0$ で、$r(A)<r<+\infty$ では

$$u(r,A)=-\frac{r(A)^{n-1}}{n-2}u'(r,A)$$

証明は〔4〕Theorem 1 から直ちに従う。

$A\to+\infty$ のときの挙動をしらべるために、ここで変数変換を行なう。そのために、次の仮定をおく、

(F_3)　$u>0$ では $f'(u)>0$ であり、かつ $f(u)\to+\infty$ $(u\to+\infty)$。

この仮定のもとで、$F(u)$ $(u\geqq\infty)$ および $\gamma(x)$ $(0<x<+\infty)$ を次のように定義する。

$$(2,5)\qquad F(u)=\int_0^u f(\xi)d\xi,$$

(2, 6)　$\gamma(x)=\left.\dfrac{f(u)^2}{F(u)f'(u)}\right|_{x=\frac{1}{f(u)}}$

以下、混同がないかぎり、変数およびパラメータの文字を以下のように用いることにする。

(2, 7)　$\begin{cases} \rho=\dfrac{1}{x}=f(u), \qquad p=F(u), \\ \varepsilon=1/f(A) \end{cases}$

新しく従属変数 v_1, v_2 を

(2, 8)　$\begin{cases} v_1=-\dfrac{r}{p}\dfrac{dp}{dr}=-\dfrac{f(u)}{F(u)}\cdot r\dfrac{du}{dr} \\ v_2=\lambda r^2\dfrac{\rho^2}{p}=\lambda r^2\dfrac{f(u)^2}{F(u)} \end{cases}$

と導入すれば、2階単独方程式 (2, 1) は、次の1階連立方程式系 (2, 9) あるいは (2, 10) に変換される。

(2, 9)　$\begin{cases} r\dfrac{d\rho}{dr}=-\dfrac{1}{\gamma}\rho v_1 \\ r\dfrac{dv_1}{dr}=-(n-2)v_1-\dfrac{1-\gamma}{\gamma}v_1^2+v_2 \\ r\dfrac{dv_2}{dr}=2v_2-\dfrac{2-\gamma}{\gamma}v_1v_2 \end{cases}$

(2, 10)　$\begin{cases} x\dfrac{dv_1}{dx}=-(n-2)\gamma+(\gamma-1)v_1+\gamma\dfrac{v_2}{v_1} \\ x\dfrac{dv_2}{dx}=2\gamma\dfrac{v_2}{v_1}+(\gamma-2)v_2 \end{cases}$

容易に確められるように、変換 (2, 8) を通じて、$\{0<r, 0<u, \dfrac{du}{dr}<0\}$ を定義域とした (2, 1) の解と、$\{0<x, 0<v_1, 0<v_2\}$ を定義域とした (2, 10) の解とは一対一対応する。さらに、初期値問題(2, 1), (2, 2)の解 $u=u(r)$ にたいしては、$x\to\varepsilon$ のときに

(2, 11)　$\begin{cases} v_1\sim 2\gamma(x-\varepsilon) \\ v_2\sim 2n\gamma(x-\varepsilon) \end{cases}$

という漸近挙動を示す v- 解が対応することがわかる。この解は、また

(2, 12)　$v_2\to 0 \qquad (x\to\varepsilon+0)$

をみたす (2, 10) の

(2, 13)　$v_1>0, \qquad v_2>0$

内の解として特徴づけることができる。以下では、$u=u(r, A)$ に対応するこの解を $v=v(x, \varepsilon)$ と記してその挙動を調べることにする。

3. 中芯核近似

ここで、次の仮定をおく。

(F_4)　$\gamma(x)$ は $0\leqq x<+\infty$ で連続であって、$\gamma_0=\gamma(0)$ とおくとき、積分

(3, 1)　$\displaystyle\int_{+0}|\gamma(x)-\gamma_0|\frac{dx}{x}$

が有限である。

この仮定にもとづき、$0 \leqq x < +\infty$で連続な関数$\omega(x)$であって

$$(3,2)\qquad |\gamma(x)-\gamma_0| \leqq \omega(x)$$

$$J_0\omega(x)=\int_0^x \omega(\xi)\xi^{-1}d\xi<+\infty$$

をみたすものをひとつ選んでおく、この節の目的は、次の「中芯核近似」を示すことになる。

命題4　任意の$a^*>1$にたいして、$\varepsilon_1=\varepsilon_1(a^*)>0$を充分小さくとるならば、$v=v(\varepsilon x^*, \varepsilon)$は$1 \leqq x^* \leqq a^*$(すなわち$\varepsilon \leqq x \leqq \varepsilon a^*$)において一様に次の評価をみたす。

$$(3,3)\qquad |v(\varepsilon x^*, \varepsilon)-v^\circ(x^*)| \leqq C\int_1^{x^*}|\gamma(\varepsilon x^*)-\gamma_0|\frac{d\xi^*}{\xi^*}$$

これは、次のようにいってもよい。$\varepsilon \leqq x \leqq \varepsilon a^+$において

$$|v(x,\varepsilon)-v^\circ(x/\varepsilon)| \leqq C\int_\varepsilon^x |\gamma(\xi)-\gamma^0|\frac{d\xi}{\xi} \leqq C\, J_0\omega(x)$$

ただし、$x=v^\circ(x)$は$\gamma\equiv\gamma_0$(定数)のときに

$$(3,4)\qquad v_1 \sim 2\gamma_0(x-1),\quad v_2 \sim 2n\gamma_0(x-1)\qquad (x\to 1)$$

をみたす(2,10)の解であって、周知のエムデン方程式

$$\frac{d^2u}{dr^2}+\frac{n-1}{r}\frac{du}{dr}+u^{\frac{1}{\sigma_0-1}}=0,$$
$$u(0)^{\frac{1}{\sigma_0-1}}=1$$

の解に対応するものである。ただし、$\gamma_0=1$のときは、$u^{\frac{1}{\sigma_0-1}}=e^u$とみなす。

命題5　$1<a^*<+\infty$を固定するごとに、$v(\varepsilon x^*, \varepsilon)$は$1 \leqq x^* \leqq a^*$において$\varepsilon$にかんして一様連続である。

注意　もし$\omega(x)=O(x^k)$ならば、(3,3)から

$$(3,5)\qquad v(x,\varepsilon)-v^\circ(x/\varepsilon)=O(x^k)$$
$$v(x^*/\varepsilon,\varepsilon)-v^\circ(x^*)=O(\varepsilon^k)$$

が成りたつ。

(3,3)が「中芯核近似」である。

仮定(F_4)の帰結として、$p=F(u)$と$\rho=1/x=f(u)$との間に$U\to+\infty(\rho\to+\infty)$のとき、

$$(3,6)\qquad p=K\rho^{\gamma_0}(1+\hat{p}),\qquad \hat{p}=O(J_0\omega(1/\rho))$$

という近似がなりたつことがわかる。したがって、「中芯核近似」は、指数$1/\gamma_0-1$のエムデン方程式の解によって、$u(r, A)$を近似することにあたっている。

あとの便宜のために、方程式(2,10)の摂動を計算しておこう。それは次のようになる。$v=v(x)$が$\gamma(x)=g(x)$のときの(2,10)の解で、$v=\bar{v}(x)$が$\gamma(x)=g(x)$のときの(2,10)の解とするとき、その差$\hat{v}(x)=v(x)-v(x)$は、$\hat{g}(x)=g(x)-\hat{g}(x)$をパラメータする次の方程式の解となる。

$$(3,7)\qquad x\frac{d}{dx}\begin{bmatrix}\hat{v}_2\\ \hat{v}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-n+2+\bar{v}_1+\dfrac{\bar{v}_2}{\bar{v}_1}\\ 2\dfrac{\bar{v}_2}{\bar{v}_1}+\bar{v}_2\end{bmatrix}\hat{g}(x)+$$

$$+\begin{bmatrix} -1+g-g\dfrac{\overline{v}_2}{\overline{v}_1^2} & \dfrac{g}{\overline{v}_1} \\ -2g\dfrac{\overline{v}_2}{\overline{v}_1^2} & -2+g+2g\dfrac{1}{\overline{v}_1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \hat{v}_1 \\ \hat{v}_2 \end{bmatrix}+$$

$$+\begin{bmatrix} g \\ 2g \end{bmatrix}\frac{\overline{v}_2}{\overline{v}_1}\frac{\hat{v}_1}{v_1}\left(\frac{\hat{v}_2}{v_2}-\frac{\hat{v}_1}{v_1}\right)\left(1+\frac{\hat{v}_1}{v_1}\right)^{-1}$$

方程式（2,10）の右辺のベクトルの成分を$V^j(\gamma(x), v)$, $j=1$, 2, と記すことにする。いま、$\gamma(x)=\overline{g}(x)$ のときの（2,10）の解$v=\overline{v}(x)\in C^1[1, a]$ が存在して、

（3, 8）　$\dfrac{1}{\kappa}(x-1)\leq v_l \leq \kappa(x-1)$

$$v_1=2\overline{g}(1)(x-1)+O((x-1)^2)$$
$$v_2=2\overline{g}(1)(x-1)+O((x-1)^2)$$

をみたすとする。$\overline{g}(x)$は$1\leq x\leq a$で正で連続と仮定する。一方、同様に$g(x)$も$1<x\leq a$で正で連続とし、$\gamma(x)=g(x)$ のときの（2,10）の解$u=u(x)$ は、次のようにしてつくる。

$\hat{v}=v-\overline{v}$ にたいする方程式は、$\overline{v}$が（3, 8）をみたすことにより、次のように書ける。

（3, 9）　$x\dfrac{d\hat{v}}{dx}=\dfrac{1}{x-1}\begin{bmatrix} -\dfrac{n}{2} & \dfrac{1}{2} \\ -n & 1 \end{bmatrix}\hat{v}+f(x, \hat{v})$。

このとき、$\overline{v}$ が（3, 8）を満たすことにより、

不等式

$$|f(x, \hat{v})|\leqq M\left\{|\hat{g}|+\left(\frac{|\hat{g}|}{x-1}+|g|\right)|\hat{v}|+|g|\left|\left(\frac{\hat{v}_1}{v_1}, \frac{\overline{v}_2}{v_1}\right)\right|\right\}$$

が

$$1\leqq x\leq a, \quad |\hat{v}|\leq\frac{\kappa}{2}(1-x)$$

で一様に成り立つとしてよい。ただし、$\hat{g}=g-\overline{g}$である。そこで、積分方程式

（3,10）　$\hat{v}(x)=\displaystyle\int_1^x U(x)U(\xi)^{-1}f(\xi, \hat{v})\frac{d\xi}{\xi}$

を考える。ただし、$U(x)$ は

$$x\frac{dU}{dx}=\frac{1}{x-1}\begin{bmatrix} -\dfrac{n}{2} & \dfrac{1}{2} \\ -n & 1 \end{bmatrix}U$$

の基本行列であって、計算すれば、

$$|U(x)U(\xi)^{-1}|\leqq M'\left|\frac{x(\xi-1)}{\xi(x-1)}\right|^{\frac{n-2}{2}} \qquad (1<\xi<x)$$

と評価できる。

いま、$0<\theta<1$ にたいして

（3,11）　$1\leq x\leq a$, $|\hat{v}|\leq\dfrac{\theta\kappa}{2}(x-1)$

をみたす$\hat{v}=\varphi(x)\in C[1, a]$ を積分方程式（3,10）の右辺に代入したものを$T\varphi(x)$とすると、

$$|T\varphi(x)|\leqq MM' a^{\frac{n-2}{2}}\left[\left(1+\frac{\theta x}{2}\right)\|\hat{g}\|(x-1)+\right.$$
$$\left.+\frac{\theta x}{2}\|\hat{g}\|(x-1)^2+\frac{\theta^2 x^4}{4}\|\hat{g}\|(x-1)\right]$$

ただし

$$\|\hat{g}\|=\sup_{1\leqq x\leqq a}|\hat{g}(x)|$$

と評価される。この右辺が$\frac{\theta x}{2}(x-1)$を超えないためには、$a-1$が充分小さく、$\|\hat{g}\|$も充分小さければよい。このとき、不動点定理により、(3,11)の範囲に積分方程式(3,10)の解が一意であることは前節の議論からわかっている。この解をさらに詳しく評価するには、

$$N(x)=\sup_{1\leqq \xi\leqq x}\frac{\hat{v}(\xi)}{\xi-1}$$

を方程式に代入して評価することにより、先と同様にして、

$$N(x)\leqq\frac{MM' a^{\frac{n-2}{2}}\frac{1}{x-1}\int_1^x \hat{g}(\xi)d\xi}{1-MM' a^{\frac{n-2}{2}}\left(1+\frac{a-1}{2}+\frac{\theta x^3}{2}\right)\|g\|}$$

が得られる。以上のことをまとめれば、

$a-1$および$\|\hat{g}\|=\sup_{1\leqq x\leqq a}\hat{g}(x)$が充分小さいとき、$g(x)=\overline{g}(x)+\hat{g}(x)$にたいしても、解$v=v(x)\in C^1[1,a]$があって、

$$(3,12)\qquad |v(x)-v(\overline{x})|\leqq C\int_1^x|g(\xi)-\overline{g}(\xi)d\xi$$

をみたすということである。方程式の右辺が$\gamma(x)$について多項式であることから、$a-1$が小さいという制限が不要であることは明らかである。したがって、次のことがわかった。

$\gamma=\overline{g}$のときの(2,10)の解$v=\overline{v}(x)\in C^1[1,a]$があり、(3,8)をみたすとき、充分小さな$\eta>0$と定数Cがあって、$g(x)\in C[1,a]$が

$$(3,13)\qquad |g(x)-\overline{g}(x)|\leq\eta,\ 1<x\leqq a$$

をみたすならば、$\gamma=g(x)$にたいする(2,10)の解$v=v(x)\in C^1([1,a]$が存在して、(3,12)をみたす。

ところで、$\gamma(x)\equiv\gamma_0$(定数)のときは、(3,8)を満たす(2,10)の解$v=v^\circ(x)$の存在することがわかっている。これは、エムデン方程式にたいする古典的な結果だからである(〔1〕,〔2〕を参照)。したがって、ひきのばしの変数(stretching variable) $x^*=x/\varepsilon$ を導入して、$\overline{g}(x^*)=\sigma_0$, $g(x^*)=\gamma(\varepsilon x^*)$に今の結論を適用すれば、本節冒頭に主張した命題4が得られる。

同様に、$g(x^*)=\gamma(\varepsilon x^*)$, $\overline{g}(x^*)=\gamma(\overline{\varepsilon}x^*)$にたいして今の結論を適用すれば、

$$|v(\varepsilon x^*,\varepsilon)-v(\varepsilon x^*,\overline{\varepsilon})|\leq\int_1^{x^*}|\gamma(\varepsilon\xi^*)-\gamma(\overline{\varepsilon}\xi^*)|\frac{d\xi^*}{\xi^*}$$

という評価がえられる。ゆえに、これから、命題5が得られる。

4．遷移層近似

中芯核近似によって、$x\to+\infty(\mathrm{f}(\mathrm{u})\to 0)$ のときの$v(x,\varepsilon)$の挙動は、$v^0(x)$ のそれによってリードされるようにみえる。$v^0(x)$ はエムデン方程式の解に対応するものであるから、すでに知られているように（〔2〕,〔3〕)、一定条件下で、特異点$v=b^s$ ただし、

(4，1)　$b^s=(b_1^s,\ b_2^s),\quad b_1^s=\dfrac{2\gamma_0}{2-\gamma_0},\quad b_2^s=\dfrac{2\gamma_0(2\mathrm{n}-2-\mathrm{n}\gamma_0)}{(2-\gamma_0)^2}$

にスパイラル状に収束する。そのためには、次の仮定をおけば充分である。

(F_5)　$1\leq\gamma_0<\dfrac{2\mathrm{n}}{\mathrm{n}+2},\quad 2<\mathrm{n}<10$

以下、この仮定をおく。

ところが一方、$v(x,\varepsilon)$は、仮定(F_2)の結果として、$x\to+\infty$では、$v_1\to+\infty$、$v_2\to 0$という、$v^0(x)$とは似ても似つかぬ挙動を最終的には示すことになる。

したがって、$v(x,\varepsilon)$が$v_0(x)$の軌道から極端に離れる直前まで、かつ、$v_0(x)\to b^s$のスパイラル状を生かすほど先までの中間的な近似が必要となる。本節は、その「遷移層近似」を得ることを目的とする。

$v\equiv b^s$が$\gamma\equiv\gamma_0$ のときの（2,10）の特殊解であることに注意して、変数yを

(4，2)　$v=b^s+y$

で定義し、yにたいする方程式を3で準備しておいた計算（3，6）を利用して計算すると次のようになる。

(4，3)　$x\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix}=\mathrm{f}(x,\ y)=\mathrm{f}_0(x)-\mathrm{A}(x)y+\mathrm{f}_2(x,y)$

ただし、

$$\mathrm{f}_0(x)=\begin{bmatrix}-\mathrm{n}+2+b_1+\dfrac{b_2}{b_1}\\[2mm] 2\dfrac{b_2}{b_1}+b_2\end{bmatrix}(\gamma(x)-\gamma_0),$$

$$\mathrm{A}(x)=\begin{bmatrix}1-\gamma(x)+\gamma(x)\dfrac{b_2}{b_1^2} & -\dfrac{\gamma(x)}{b_1}\\[2mm] 2\gamma(x)\dfrac{b_2}{b_1^2} & 2-\gamma(x)-2\gamma(x)\dfrac{1}{b_1}\end{bmatrix}$$

$$\mathrm{f}_2(x,y)=-\begin{bmatrix}\gamma(x)\\2\gamma(x)\end{bmatrix}\frac{b_2}{b_1}\frac{y_1}{b_1}\left(\frac{y_2}{b_2}-\frac{y_1}{b_1}\right)\left(1+\frac{y_1}{b_1}\right)^{-1},$$

ここで

(4，4)　$\mathrm{A}(0)=\begin{bmatrix}\mathrm{n}-\dfrac{\mathrm{n}+2}{2}\gamma_0 & \dfrac{\gamma_0}{2}-1\\[2mm] 2\mathrm{n}-2-\mathrm{n}\gamma_0 & 0\end{bmatrix}$

の固有方程式は

$$\lambda^2+\frac{-2\mathrm{n}+(\mathrm{n}+2)\gamma_0}{2}\lambda+\frac{(2\mathrm{n}-2-\mathrm{n}\gamma_0)(2-\gamma_0)}{2}=0$$

となり、固有値は、

(4，5)　$\lambda=\mu\pm i\nu,\quad i=\sqrt{-1}$

$$\mu=\frac{2n-(n+2)\gamma_0}{4},$$

$$\nu=\frac{2-\gamma_0}{4}\sqrt{(n-2)(10-n)+8(n-2)\left(\frac{\gamma_0-1}{2-\gamma_0}\right)-16\left(\frac{\gamma_0-1}{2-\gamma_0}\right)^2}$$

となる。したがって、実標準化は、

$$(4,6)\qquad AP=P\begin{bmatrix}\mu & -\nu\\ \nu & \mu\end{bmatrix},\quad P=\begin{bmatrix}2-\gamma_0 & 0\\ 2\mu & 2\nu\end{bmatrix}$$

と行なうことができる。

仮定（F_5）により、$\mu>0$, $\nu>0$ である。そこで、次の準備定理が適用できる。

準備定理、方程式

$$(\mathrm{E})\qquad x\frac{dy}{dx}=f_0(x)-A(x)y+f_2(x,y)$$

が次の仮定（H_0），（H_1），（H_2）を満たすとする。

（H_0）　$f_0\in B(\alpha_0,\omega_0)$,　$f_0(0)=0$,　$J_0\omega_0(x)<+\infty$

（H_1）　$A(x)\in B(\alpha_0,\omega_1)$,　$A=A(0)$ の固有値 λ_1, λ_2 は異なる共範複素数であって、$\mu=\mathrm{Re}\lambda_1=\mathrm{Re}\lambda_2>0$,　$J_0\omega_1(x)<+\infty$

（H_2）　$f_2\in A^{(2)}(\alpha_0,\omega_2,\beta_0)$

このとき、方程式（E）は、

$$(\mathrm{T})\qquad y=P_0(x)+P(x)z+P_2(x,z)$$

の形の変換によって、方程式

$$(\widetilde{\mathrm{E}})\qquad x\frac{dz}{dx}=-A(0)z$$

に変換することができる。ここに変換（T）は次の性質（P_0）（P_1）（P_2）をもつ。

（P_0）　$P_0\in B(\alpha,J\mu\omega_0)$,　$P_0(0)=0$

（P_1）　$P(x)\in B(\alpha,J_0(\omega_0+\omega_1))$,　$P(0)=I$（単位行列）

（P_2）　$P_2(x,z)\in A^{(2)}\ (\alpha,J_0(\omega_0+\omega_1)+J^{\mu}(\omega_0+\omega_1+\omega_2),\ \gamma)$

しかも、

$$(\mathrm{T})^0\qquad y=z+P_2(0,z)$$

で与えられる変換は、方程式

$$(\mathrm{E})^0\qquad x\frac{dy}{dx}=-A(0)y+f_2(0,y)$$

を（$\widetilde{\mathrm{E}}$）に変換する。

ただし、ω_j, $j=0$, 1, 2, は$B(\alpha_0)$ に属し、$0\leq\omega_j(x)$, $\omega_j(0)=0$ をみたすとする。

記号の説明

$B(\alpha,\omega)$ は、$0\leq x\leq\alpha$ で連続な関数 $\varphi(x)$ であって、

$$|\varphi(x)|\leqq C\omega(x)\qquad(0\leq x\leq\alpha)$$

をみたす定数Cが存在するもの全体を表わす。

$A^{(2)}(\alpha,\omega,\beta)$ は、$0\leqq x\leq\alpha$, $|y|=\max(|y_1|,\ |y_2|)\leqq\beta$ で連続かつyについて解

析的な関数$\varphi(x, y)$で

$$\varphi(x, y)=\sum_{2\leq|j|}\varphi_j(x)y^j,\quad \varphi_j\in \mathrm{B}(\alpha, \omega)$$

と展開できるもの全体を表わす。

また、関数$\omega(x)$にたいして

$$\mathrm{J}_\mu\omega(x)=x^{-\mu}\int_0^x\omega(\xi)\xi^{\mu-1}d\xi,$$

$$\mathrm{J}^\mu\omega(x)=\mathrm{J}^\mu\omega(x, \delta)=x^\mu\int_x^\sigma\omega(\xi)\xi^{-\mu-1}d\xi$$

とおく。

この準備定理の証明は、あとまわしにして、今はこれを認めることにしよう。そうすると、今の場合は、

(4, 7)　$v=v^s(x)+\mathrm{P}(x)z+\mathrm{P}(x, z)$

の形の変換で、方程式(2, 10)は

(4, 8)　$x\dfrac{dz}{dx}=\mathrm{A}(0)z$

に帰着する。ここで、充分小さな$\alpha>0$, $\beta>0$にたいして

(4, 9)　$\begin{cases} v^s(x)\in \mathrm{B}(\alpha,\ \mathrm{J}_\mu\omega),\ v(0)=b^s, \\ \mathrm{P}(x)\in \mathrm{B}(\alpha, \mathrm{J}_0\omega),\ \mathrm{P}(0)=\mathrm{I}, \\ \mathrm{p}(x, z)\in \mathrm{A}^{(2)}(\alpha,\ \mathrm{J}_0\omega+\mathrm{J}^\mu\omega,\ \beta) \end{cases}$

がなりたち、しかも$\mathrm{p}(0, z)$は

(4, 7)^0　$v=b^s+z+\mathrm{p}(0, z)$

が$\gamma(x)\equiv\gamma_0$の場合の(2, 10)を(4, 8)に変換するものとなっている。

ここで、$v=v^s(x)$はそれじしんが、(2, 10)の特殊解になっていることに注意しよう。これには、もちろん(2, 1)の解が対応し、それを$\mathrm{u}=\mathrm{u}^s(\mathrm{r})$　$(\mathrm{r}>0)$とすれば、これは$\mathrm{r}\to+0$のとき

(4, 10)　$\mathrm{f}(\mathrm{u})\sim\left(\dfrac{b_2\varkappa}{\lambda}\right)^{\frac{1}{2-\gamma_0}}\mathrm{r}^{-\frac{2}{2-\gamma_0}},$

$$-\frac{d\mathrm{u}}{d\mathrm{r}}\sim b_1b_2^{\gamma_0-1}\varkappa^{\frac{1}{2-\gamma_0}}\lambda^{-\frac{\gamma_0-1}{2-\gamma_0}}\mathrm{r}$$

(ここで$\varkappa$は(3, 6)で現れる定数)

という漸近挙動を示す解である。$\mathrm{u}=\mathrm{u}^s(\mathrm{r})$は$0<\mathrm{r}<+\infty$に延長されて、仮定($\mathrm{F}_2$)により$\mathrm{r}=\mathrm{R}_s$に零点をもつ。$v^s(x)$もこれに応じて$0<x<+\infty$に延長され、

$$v_1^s\to+\infty,\quad v_2^s\to 0\quad (x\to+\infty)$$

となることはもちろんである。

(4, 7)を逆に解いたものを

(4, 11)　$z=\mathrm{P}(x)^{-1}(v-v^s(x))+\mathrm{q}(x, v-v^s(x)),$

$$\mathrm{q}\in \mathrm{A}^{(2)}(\alpha_1,\ \mathrm{J}_0\omega+\mathrm{J}^\mu\omega,\ \beta_1)$$

とする。

解$v=v(x, \varepsilon)$を初期条件

(4,12)　$v-v^s(x)=b(\varepsilon),\quad x=\varepsilon a^*$

で規定しなおすことができる。ただし、

(4,13)　$b(\varepsilon)=v(\varepsilon a^*,\varepsilon)-v^s(\varepsilon a^*)$

であって、$a^*>1$ は充分大きくとって

$$|v^0(a^*)-b^s|\leq\frac{\alpha_1}{8}$$

が成り立つようにしておく。($v^0(x)\to b^s, x\to+\infty$, からこれは可能である) そうすれば、中芯核近似の結果（命題4 (3, 3))、および

$$v^0(x)-b^s\to 0\quad(x\to 0)$$

により、$\varepsilon_1=\varepsilon_1(a^*)$ を充分小さくとれば、$0<\varepsilon\leq\varepsilon_1$ において

(4,14)　$|b(\varepsilon)|\leqq|v(\varepsilon a^*,\varepsilon)-v^0(a^*)|+|v^s(\varepsilon a^*-b^s)|+|v^0(a^*)-b^s|$
$\leqq\alpha_1$

が成り立つようにできる。そうすれば、(4,11) に $b(\varepsilon)$ を代入して、$c(\varepsilon)$ を

(4,15)　$(a^*)^{-A_0}c(\varepsilon)=\mathrm{P}(\varepsilon a^*)^{-1}b(\varepsilon)+\mathrm{q}(\varepsilon a^*,b(\varepsilon))$

のように定義することができる。このとき、

$$z=\left(\frac{x}{\varepsilon a^*}\right)^{-A_0}(a^*)^{-A_0}c(\varepsilon)$$
$$=(x^*)^{A_0}c(\varepsilon)$$

が (4, 8)、および

(4,16)　$z=(a^*)^{-A_0}c(\varepsilon),\quad x=\varepsilon a^*$

の解であるから、$v(x,\varepsilon)$ はこれを (4, 7) に代入して表現することができ、次の結果を得る。

命題6　充分大きな a^* と適当な $\varepsilon_1=\varepsilon_1(a^*)$ があって、

(4,17)　$0<x\leq\alpha,\quad a^*\leq x^*=\dfrac{x}{\varepsilon}<+\infty,\quad 0<\varepsilon\leq\varepsilon_1$

の範囲で $v(x,\varepsilon)$ は

(4,18)　$v(x,\varepsilon)=v^s(x)+\mathrm{P}(x)(x^*)^{-A_0}c(\varepsilon)+\mathrm{p}(x,(x^*)^{-A_0}c(\varepsilon))$

と表現できる。

ここに、

$$c(\varepsilon)-c^0=0(\mathrm{J}_0\omega(\varepsilon a^*)+\mathrm{J}_\mu\omega(\varepsilon a^*)),$$
$$c_0=\lim_{x-\infty}x^{A_0}(v^0(x)-b^s)\neq 0$$

である。

$c_0\neq 0$ は、$v^0\neq b^s$ から自律系 $(2,10)_{\gamma=\gamma_0}$ の基本的性質から従う。

5. 表面層近似

前に注意したように、特異解 $v=v^s(x)$ は $x\to+\infty$ のとき、$v_1^s\to\infty$, $v_2^s\to 0$ というように、b^s を去ってゆく。したがって、$x^*=x/\varepsilon$ にくらべて x が大きいときは、$v^s(x)$ を第一近似として採用しなければならない。この部分を考えるのには、変数として、

$$(5,1)\quad \begin{cases} u=u \\ r=r \\ m=-\dfrac{\omega_n}{\lambda}r^{n-1}\dfrac{du}{dr} \end{cases} \qquad (\omega_n\text{は単位球面積},\ \omega_3=4\pi)$$

を採用するのが便利である。(x, v_1, v_2) 変数との関係は、次のようになる。

$$(5,2)\quad \frac{1}{x}=\rho=f\ (u),\quad p=F(u)=\int_0^u f(u)du$$

$$r=\lambda^{1/2}p^{1/2}\rho^{-1}(v_2)^{1/2},$$

$$m=4\pi\lambda^{(n-4)/4}p^{n/2}\rho^{-n+1}v_1(v_2)^{(n-2)/2}$$

このとき、uを独立変数にとると、方程式は

$$(5,3)\quad \begin{cases} \dfrac{dr}{du}=-\dfrac{\omega_n}{\lambda}r^{n-1}m^{-1} \\ \\ \dfrac{dm}{du}=-\dfrac{(\omega_n)^2}{\lambda}f(u)r^{2n-2}m^{-1} \end{cases}$$

となる。右辺は、$\{|u|<+\infty,\ 0<r,\ 0<m\}$ で連続であり、かつr, mについて解析的である。

特異解$u=u_s(r)$ に対応する (60) の解を

$$(r,m)=(r_s(u),\ m_s(u))$$

とすれば、これは

$$-\frac{1}{n-2}\frac{M_s}{R_s^{n-2}}<u<+\infty$$

に存在して、

$$R_s=r_s(0),\quad M_s=m_s(0)$$

はいづれも正かつ有限となる。初期値問題

$$(2,1)\quad \frac{d^2u}{dr^2}+\frac{n-1}{r}\frac{du}{dr}+\lambda f(u)=0,$$

$$(2,2)\quad f(u(0))=f(A)=1/\varepsilon$$

の解$u=u(r,A)$ に対応する (5, 3) の解を $(r,m)=(r(u,\varepsilon),\ m(u,\varepsilon))$ とすれば、

$$(5,4)\quad \begin{cases} R(\varepsilon)=r(0,\varepsilon)=r(A) \\ M(\varepsilon)=m(0,\varepsilon)=\omega_n\displaystyle\int_0^{r(A)}f(u(r,A))r^{n-1}dr \end{cases}$$

が調べたいものである。なお、特異解にたいしても

$$(5,5)\quad M(S)=\omega_n\int_0^{R(S)}f(u_s(r))r^{n-1}dr$$

のなりたつことは、(4, 10) および仮定 (F_5) からわかる。

ここで、遷移層近似すなわち命題6、(4, 17) から出発し、その端点$x=\alpha$に対応して、

$$u_0=f^{-1}(\alpha)$$

に着目する。変数変換 $(v_1,v_2)\to(r,m)$ は (5, 2) にみるように、$v_1>0$, $v_2>0$ で解析的であるから、(4, 17) からただちに、次の表現が$u=u_0$で成り立つ。

$$(5,6)_0 \quad \begin{bmatrix} r(u_0,\varepsilon) \\ m(u_0,\varepsilon) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_s(u_0) \\ m_s(u_0) \end{bmatrix} + Q_0 \varepsilon^{A_0} c(\varepsilon) + q(\varepsilon^{A_0} c(\varepsilon))$$

ただし

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & \lambda^{\frac{1}{2}} p^{\frac{1}{2}} \rho^{-1} \cdot \frac{1}{2} v_1^{\frac{1}{2}} \\ 4\pi\lambda^{\frac{n-4}{2}} p^{\frac{n}{2}} \rho^{-n+1} v_2^{\frac{n-2}{2}} & 4\pi\lambda^{\frac{n-4}{2}} p^{\frac{n}{2}} \rho^{-n-1} v_1 \cdot \frac{n-2}{2} v_2^{\frac{n-4}{2}} \end{bmatrix} u_0^{-A_0}$$

ここに

$$v_j = v_j^s(u_0), \quad p = F(u_0), \quad \rho = f(u_0)。$$

とりあえず、Qは正則行列で、q（ζ）は、ζ にかんして、収束べき級数である。これから出発して正則な摂動を行なえば、次のような「表面層近似」が得られる。

命題7　ε_2 を充分小さくとると、

$$0 \leq u \leq u_0, \quad 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_2$$

において、$(r(u,\varepsilon), m(u,\varepsilon))$ は次の形に表現される。

$$(5,6) \quad \begin{bmatrix} r(u,\varepsilon) \\ m(u,\varepsilon) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_s(u) \\ m_s(u) \end{bmatrix} Q(u)\varepsilon^{A_0} c(\varepsilon) + q(u, \varepsilon^{A_0} c(\varepsilon))$$

ここに、1） $Q(u)$ は$-(n-2)M_sR_s^{n-2} < u < +\infty$で連続な正則行列、2） $q(u,\zeta)$ は、$-(n-2)M_sR_s^{n-2} < u < +\infty$, $|\zeta| \leq \delta(u)$ で連続かつ ζ について解析的である。ただし、$\delta(u)$ は $-(n-2)M_sR_s^{n-2} < u < +\infty$ で正の値をとる連続関数である。

とくに（5，6）でu＝0とおくと、$Q(0)$ が正則であるため、$R_1 > 0$, $M_1 > 0$ がとれて次の表現を得る。

$$(5,7) \quad S(\varepsilon) = R_s + R_1 \hat{c}(\varepsilon)\varepsilon^{\mu}\cos(\nu\log\varepsilon + \theta_R) + \\ + \sum_{j_1+j_2\geq 2} R_{j_1 j_2} \hat{c}(\rho)^{j_1+j_2} \varepsilon^{\mu(j_1+j_2)} \cos^{j_1}(\nu\log\varepsilon+\theta)\sin^{j_2}(\nu\log\varepsilon+\theta),$$

$$M(\varepsilon) = M_s + M_1 \hat{c}(\varepsilon)\varepsilon^{\mu}\cos(\nu\log\varepsilon + \theta_M) + \\ + \sum_{j_1+j_2\geq 2} M_{j_1 j_2} \hat{c}(\varepsilon)^{j_1+j_2} \varepsilon^{\mu(j_1+j_2)} \cos^{j_1}(\nu\log\varepsilon+\theta)\sin^{j_2}(\nu\log\varepsilon+\theta)$$

6．エネルギの近似表現

以上で中芯核、遷移層、表面層の各層における近似が得られたわけである。最後にまとめて、エネルギーの近似をしておく。

まず、（2，11）の解$u = u(r)$, $0 < r < +\infty$, にたいして$\phi(r)$を

$$(6,1) \quad \phi(r) = -\lambda\int_0^{\infty} K(r,s) f(u(s)) s^{n-1} ds,$$

$$K(r,s) = \begin{cases} \dfrac{1}{(n-2)r^{n-2}} & (s \leqq r) \\ \dfrac{1}{(n-2)s^{n-2}} & (r \leqq s) \end{cases}$$

で定義する。$m(r)$ を

$$(6,2) \quad m(r) = \omega_n \int_0^r f(u(s)) s^{n-1} ds$$

と定義する。汎関数E, $E_{重}$, $E_{熱}$を次のように定義する（それぞれ、総エネルギー、重力エネルギー、熱エネルギーと解釈できる）

（6, 3）　$E = E_{熱} + E_{重},$

$$E_{熱} = \omega_n \int_0^\infty (u(r)f(u(r)) - F(u(r)))r^{n-1}dr$$

$$E_{重} = \omega_n \int_0^\infty \frac{1}{2}\phi(r)f(u(r))r^{n-1}dr$$

いま

$$\rho(r) = f(u(r))$$

とすると、$E_{重}$ はまた次のように書きなおすことができる。

（6, 4）　$E_{重} = -\dfrac{\lambda}{n-2}\displaystyle\int_0^\infty \rho(r)m(r)rdr$

したがって、（6, 3）のかわりに

（6, 5）　$E = \omega_n \displaystyle\int_0^\infty \rho(r)r^{n-1}dr\left[\bar{u} - \frac{\lambda}{\omega_n(n-2)}r^{-n+2}m\right]$

$$\bar{u} = u - \frac{p}{\rho}$$

と書いてもよい。（$p = F(u(r))$である。）以下このような形式的考察をつづけよう。

（6, 5）の独立変数の関数を$\rho(r) = f(u(r))$から$m(r)$にかえ、$\rho(r)$を

（6, 6）　$\rho(r) = \dfrac{1}{\omega_n}r^{1-n}\dfrac{dm}{dr}$

という関係からみちびかれる関数とみなせば、Eは、次の形の汎関数にかける。

（6, 7）　$E = \displaystyle\int_0^\infty \Phi(r, m, \frac{dm}{dr})dr,$

ただし

$$\Phi(r, m, m') = m'\left(\bar{u}\,\middle|\,\rho = \frac{1}{4\pi}r^{1-n}m',\ -\frac{\lambda}{4\pi(n-2)}r^{-n+2}m\right)$$

ここで、$d\bar{u} = pd\rho/\rho^2$ により、変分問題としての（6, 7）のオイラー方程式

$$\frac{\partial\Phi}{\partial m} + \frac{d}{dr}\frac{\partial\Phi}{\partial m'} = 0$$

は、

（6, 8）　$\dfrac{1}{\rho}\dfrac{dp}{dr} + \dfrac{\lambda}{\omega_n}r^{-n+1}m = 0$

となる。（6, 8）の両辺をrで微分し（6, 6）を用いれば、基礎方程式（2, 1）が得られる。

逆にいうと、（2, 1）の解$u = u(r) \in C^2(0, +\infty)$ が

（6, 9）　$\begin{cases} \omega_n \displaystyle\int_0^\infty f(u(r))r^{n-1}dr < +\infty, \\ r^{n-1}\dfrac{du}{dr} \to 0 \quad (r \to 0) \end{cases}$

を満たせば、$\rho(r) = f(u(r))$ から（6, 2）で定義される$m(r)$ をつくると（6, 8）が

満たされて、汎関数Eの停留関数が得られるという関係になっているわけである。

また、一般的な方針に従って、汎関数Eを、停留関数にもとづいて、変数変換を行なえば、

$$(6,10)\qquad E=\int_0^A \Psi\left(u,\ r,\frac{dr}{du},\ m,\frac{dm}{du}\right)du,$$

ただし

$$\Psi(u,\ r,\ r',\ m,\ m')=\omega_n F(u) r^{n-1} r' + \left(\frac{\lambda}{\omega_n(n-2)} r^{2-n} m - u\right) m'$$

となる。すくなくとも、$u(r,\varepsilon)$ や $u^s(r)$ にたいしては、エネルギーは (6,10) で計算されることになる。すでに得た各層の近似が、u, $\rho=f(u)$, $x=1/\rho$ などを独立変数にとってあるため、この表現の方がエネルギーの近似が見やすい。ちなみに、汎関数 (6,10) のEuler 方程式は、表面層近似で用いた方程式（5, 3）に他ならない。また、

$$(6,11)\qquad dE=\Psi\left(u,\ r,\frac{dr}{du},\ m,\frac{dm}{du}\right)du$$

$$=\left(-\frac{v_1}{n-2}+\frac{u\rho}{p}-1\right)\omega_n \lambda^{\frac{n}{2}} p^{\frac{n+2}{2}} \rho^{-n-1} v_1^{-1} v_2^{\frac{n}{2}} d\rho$$

となる。

$u(r,\varepsilon)$ に沿ってEをevaluate したものをE_ε, $u^s(r)$ に沿ってEをevaluate したものをE_sと記す。

まず、中芯核領域

$$(6,12)\qquad \varepsilon \leqq x \leqq \frac{1}{\rho} \leqq \varepsilon a^* \text{ すなわち}$$

$$u_1(\varepsilon)\leqq u \leqq A$$

におけるEの評価からはじめる。

$\bar{u}_s(r)$ に沿っては、この領域では一様に

$$(6,13)\qquad \gamma p^{\frac{n+2}{2}} \rho^{-n} v_1^{-1} v_2^{\frac{n}{2}} d\rho = O\left(\rho^{\frac{n+2}{2}\gamma_0 - n-1}\right)|d\rho|$$

であり、一方

$$(6,14)\qquad \frac{u\rho}{p}=\begin{cases} O(1), & \gamma_0>1 \\ O(\log\rho), & \gamma_0=1 \end{cases}$$

が成り立つ。したがって、$u_s(r)$ に沿って、中芯核領域では一様に

$$(6,15)\qquad dE=\begin{cases} O\left(x^{-\frac{n+2}{2}\gamma_0+n+1}\right)|dx|, & \gamma_0>1 \\ O\left(|\log x| x^{-\frac{n}{2}}|dx|\right), & \gamma_0=1 \end{cases}$$

が成り立ち、これを積分すれば、

$$-\frac{n+2}{2}\gamma_0+n>0$$

により、

$$(6,16)\qquad E_s\Big|_{\varepsilon}^{x=\varepsilon a^*}=\begin{cases} O\left(\varepsilon^{n-\frac{n+2}{2}\gamma_0}\right)=O(\varepsilon^{2\mu}), & \gamma_0>1 \\ O\left(|\log\varepsilon|\varepsilon^{\frac{n-2}{2}}\right)=O(|\log\varepsilon|\varepsilon^{\mu}), & \gamma_0=1 \end{cases}$$

となる。

一方、$u(r,\varepsilon)$ に沿っては、$x^*=x/\varepsilon$ を導入すると

$$dE=\omega_n \lambda^{\frac{n}{2}}\gamma K^{\frac{n+2}{2}}\left[\frac{v_1}{n-2}-\frac{u\rho}{p}+1\right](1+\hat{p})^{\frac{n+2}{2}}\times x^{n-\frac{n+2}{2}\gamma_0-1}v_1^{-1}v_2^{\frac{n}{2}}dx$$

から、中芯核近似により、

$$dE \lesssim \varepsilon^{n-\frac{n+2}{2}\gamma_0}(x^*)^{n-\frac{n+2}{2}\gamma_0-1}(x^*-1)^{\frac{n-2}{2}}dx^*$$

がみやすい。この評価を $1\leq x^*\leqq a^*$ で積分すれば、

$$(6,17)\qquad E_\varepsilon\Big|_{x=\varepsilon}^{x=\varepsilon a^*}=\begin{cases}O(\varepsilon^{n-\frac{n+2}{2}\gamma_0})=O(\varepsilon^{2\mu}), & \gamma_0>1\\ O(|\log\varepsilon|\varepsilon^{\frac{n}{2}})=O(|\log\varepsilon|\varepsilon^{2\mu}), & \gamma_0=1\end{cases}$$

が得られる。

次に、遷移層

(6,18)　$\varepsilon a^*\leq x\leq a$ すなわち $u_0\leqq u\leqq u_1(\varepsilon)$

において考える。ここで、$E_\varepsilon-E_s$ を評価するために、

(6,19)　$\Delta r=r_\varepsilon-r_s,\ \Delta m=m_\varepsilon-m_s$

と略記して、$E_\varepsilon-E_s$ の被積分関数のテーラー展開を計算する：

$$(6,20)\qquad dE_\varepsilon-dE_s=\left[\frac{\partial\Psi}{\partial r}\Big|_s\Delta r+\frac{\partial\Psi}{\partial r'}\Big|_s\Delta r'+\frac{\partial\Psi}{\partial m}\Big|_s\Delta m+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial\Psi}{\partial m'}\Big|_s\Delta m'\right]du+\Omega du,$$

ただし

$$\Omega=\frac{1}{2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial r^2}\Big|_*(\Delta r)^2+\frac{\partial^2\Psi}{\partial r\partial r'}\Big|_*\Delta r\Delta r'+\frac{\partial^2\Psi}{\partial r\partial m}\Big|_*\Delta r\Delta m$$

$$+\frac{\partial^2\Psi}{\partial r\partial m'}\Big|_*\Delta r\Delta m'+\frac{\partial^2\Psi}{\partial m\partial m'}\Big|_*\Delta m\Delta m'\Big\}$$

となる。$\left(\frac{\partial^2\Psi}{\partial r'^2}=\frac{\partial^2\Psi}{\partial r'\partial m}=\frac{\partial^2\Psi}{\partial r'\partial m'}=\frac{\partial^2\Psi}{\partial m^2}=\frac{\partial^2\Psi}{\partial m'^2}=0\right.$ に注意。$\Big)$ ここで、$\cdots\cdots\Big|_s$ は

$r_s(u)$ に沿っての evaluate, $\cdots\cdots\Big|_*$ は適当な

$r=r_s+\theta_1\Delta r,\quad m=m_s+\theta_2\Delta m,$

$r'=r_s'+\theta_3\Delta r',\ m'=m_s'+\theta_4\theta_4\Delta m'$

$0\leqq\theta_j=\theta_j(u,\varepsilon)\leq 1,\quad j=1,\ 2,\ 3,\ 4$

における evaluate を表わす。遷移層近似 (4,18) の結果、一様に

$$\left|\frac{\Delta r}{rs}\right|+\left|\frac{\Delta m}{ms}\right|+\frac{|\Delta r'|}{|rs'|}+\frac{|\Delta m'|}{|ms'|}=O((\varepsilon/x)^\mu)$$

が成り立つ。これから、Ωdu の第一項は、次のように評価される：

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial r^2}\Big|_*(\Delta r)^2du=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\ \omega_n(n-1)(n-2)pr^{n-3}r'+\frac{\lambda}{\omega_n}(n-1)r^{-n}mm'\ \right](\Delta r)^2du$$
$$\lesssim p^{\frac{n}{2}}x^{n-1}v_1^{-1}v_2^{\frac{n}{2}}(\varepsilon/x)^{2\mu}\gamma p|dx|$$
$$\lesssim \varepsilon^{2\mu}x^{-1}|dx|$$

他の項も同様にして、遷移層では一様に

(6,21)　$\Omega du=O(\varepsilon^{2\mu}x^{-1})|dx|$

がなりたち、これを積分すれば、

(6,22)　$\int_{u_0}^{u_1(\varepsilon)}\Omega du=O(\varepsilon^{2\mu}|\log\varepsilon|)$

がえられる。

一方、(6,20) の第一項を部分積分して、$r_s(u)$ が停留関数であることを用いると、

(6,23)　$dE\Big|_\varepsilon-dE\Big|_s=\left[\frac{\partial\Psi}{\partial r'}\Big|_s\Delta r+\frac{\partial\Psi}{\partial m'}\Big|\Delta m\right]_{x=a}^{x=\varepsilon a^*}+\int_{u_0}^{u(\varepsilon)}\Omega du$

が得られる。端点 $x=\varepsilon a^*$ の方では、

$$\left.\frac{\partial\Psi}{\partial r'}\right|_s\Delta r+\left.\frac{\partial\Psi}{\partial m'}\right|_s\Delta m\Bigg]^{xa*}$$
$$=\begin{cases}O(\varepsilon^{-\frac{n+2}{2}\gamma_0+n})=O(\varepsilon^{2\mu}), & \gamma_0>1\\ O(|\log\varepsilon|\varepsilon^{\frac{n-2}{2}})=O(\varepsilon^{2\mu}|\log\varepsilon|), & \gamma_0=1\end{cases}$$

が成り立つことが容易にわかる。けっきょく遷移層の区間では、

(6,24)　$\Big[E_\varepsilon-E_s\Big]_{遷}=-\left[\frac{\partial\Psi}{\partial r_1}\Big|_s\Delta r+\frac{\partial\Psi}{\partial m'}\Big|_s\Delta m\right]_{x=a}+O(|\log\varepsilon|\varepsilon^{2\mu})$

が成り立つ

最後に表面層

$a\leq x\leq+\infty$　すなわち$0\leq u\leq u_0$

において考える。$D\Psi$, $D^2\Psi$ は考えている範囲 ($r\geq R_s/2$) では有界連続である。一方、Δr, $\Delta r'$, Δm, $\Delta m'$ はいづれも、表面層近似においては一様に$O(\varepsilon^{2\mu})$ である。したがって、ただちに、表面層においては、

(6,25)　$\Big[E_\varepsilon-E_s\Big]_{表面}=\left[\frac{\partial\Psi}{\partial r'}\Big|_s\Delta r+\frac{\partial\Psi}{\partial m'}\Big|\Delta m\right]_{x=+\infty}^{x=a}+O(\varepsilon^{2\mu})$

がえられる。ところが、端点$x=+\infty$ ($u=0$) の方は、$p\to0$, $r\to R_s$, $m\to M_s$, $u\to0$ であるから、

$$\left[\frac{\partial\Psi}{\partial r'}\Big|_s\Delta r+\frac{\partial\Psi}{\partial m'}\Big|\Delta m\right]_{x=+\infty}=\frac{\lambda}{4\pi(n-2)}R_s^{n-2}M_s\Delta m\Big|_{u=0}$$

となることがわかる。かくして、(6,25), (6,24), (6,17), (6,16) を加えあわせれば、次の結論が得られる。

(6,30)　$E_\varepsilon=E_s-\frac{\lambda}{\omega_n(n-2)}R_s^{2-n}M_s(M_\varepsilon-M_s)+O(\varepsilon^{2\mu}|\log\varepsilon|)$

7. 準備定理の証明

この節では、**5. 遷移層近似**で利用した準備定理を証明する。もういちど準備定理と記号を述べておこう。

記号

$\omega(x)$ は $[0, +\infty)$ で連続・非負値とする、$B(\alpha, \omega)$ は、$0 \leqq x \leqq \alpha$ で連続な関数 $\varphi(x)$ で

$$\|\varphi\|_{\alpha,\omega} \equiv \inf\ \{C \,\big|\, |\varphi(x)| \leqq C\omega(x)^{\forall} x \leq \alpha\}$$

が有限なもの全体を表わす。

$A^{(2)}(\alpha, \omega, \beta)$ は、$0 \leq x \leq \alpha$, $|y| = \max(|y_1|, |y_2|) \leq \beta$ で連続かつ y について解析的で、

$$\varphi(x, y) = \sum_{|j| \geq 2} \varphi_j(x) y^j, \quad \varphi_j \in B(\alpha, \omega)$$

と展開できる関数 $\varphi(x, y)$ の全体を表わす。

$$J_\mu \omega(x) x^{-\mu} \int_0^x \omega(\xi) \xi^{\mu-1} d\xi$$

$$J^\mu \omega(x) = J^\mu \omega(x, \delta) = x^\mu \int_x^\delta \omega(\xi) \xi^{-\mu-1} d\xi$$

と定義する。$\delta > 0$ は適当な数。

$$\|\varphi\|_\alpha = \sup_{x \leq \alpha} |\varphi(x)| = \|\varphi\|$$

と記す。

準備定理、方程式

$$(7, 1) \qquad x\frac{dy}{dx} = f(x, y) = f_0(x) A(x) y + f_2(x, y)$$

が次の仮定をみたすとする。

(H_0) $\qquad f_0 \in B(\alpha_0, \omega_0)$, $\quad f_0(0) = 0$, $\quad J_0 \omega_0(x) < +\infty$

(H_1) $\qquad A(x) \in B(\alpha_0, \omega_1)$, $\quad A = A(0)$ の固有値 λ_1, λ_2 は異なる共範複素数で、

$\qquad \mu = \mathrm{Re}\,\lambda_1 = \mathrm{Re}\,\lambda_2 > 0$, $\quad J_0 \omega_1(x) < +\infty$

(H_2) $\qquad f_2 \in A^2(\alpha_0; \omega_2, \beta_0)$

このとき、方程式 (7, 1) は

$$(7, 2) \qquad y = p(x, z) \equiv p_0(x) + P(x) z + p_2(x, z)$$

の形の変換によって、方程式

$$(7, 3) \qquad x\frac{dz}{dx} = -Az$$

に帰着することができる。ここに変換 (7, 2) は、次の性質 (p_0) (p_1) (p_2) をもつ。

(p_0) $\qquad p_0 \in B(\alpha, J_\mu \omega_0)$, $\quad p_0(0) = 0$,

(p_1) $\qquad P(x) \in B(\alpha, J_0(\omega_0 + \omega_1))$, $\quad P_0(0) = I$

(p_2) $\qquad p_2(x, z) = A^{(2)}(\alpha, J_0(\omega_0 + \omega_1) + J^\mu(\omega_0 + \omega_1 + \omega_2), \gamma)$

ただし、ω_j, $j = 0, 1, 2$, は $\omega_j(x) \leq 0$, $\omega_j(0) = 0$ をみたすとする。

さらに、

$(7, 2)^0 \quad y = \mathrm{p}(0, z)$
は、

$(7, 1)^0 \quad x\dfrac{dy}{dx} = \mathrm{f}(0, y)$

を（7，3）に変換するものである。

以上が証明すべき準備定理である。証明はいくつかの補題に分けて行なおう。

補題1　方程式（7，1）にたいして仮定 (H_0), (H_1) が成り立つとき、

$(7, 4) \quad y = 0 \quad (x = 0)$

をみたす解 $y = \varphi(x)$ が $\mathrm{B}(\alpha, \mathrm{J}_\mu\omega_0)$ のなかに存在する。

証明

$$(7, 5)\quad \begin{cases} \hat{\mathrm{A}}(x) = \mathrm{A}(x) - \mathrm{A} \\ \hat{\mathrm{f}}(x, y) = \mathrm{f}_0(x) - \hat{\mathrm{A}}(x)y + \mathrm{f}_2(x, y) \end{cases}$$

とおいて、積分方程式

$$(7, 6)\quad \varphi(x) = \mathrm{T}\varphi(x) \equiv \int_0^x \left(\frac{x}{\xi}\right)^{-\mathrm{A}} \hat{\mathrm{f}}(\xi, \varphi(\xi))\frac{d\xi}{\xi}$$

を解けばよい。仮定から、

$$(7, 7)\quad \begin{aligned} &|\mathrm{f}_0(x)| \leqq \|\mathrm{f}_0\|\omega_0(x), \\ &|\hat{\mathrm{A}}(x)| \leqq \|\hat{\mathrm{A}}\|\omega_1(x), \\ &|\mathrm{f}_2(x)| \leq \|\mathrm{f}\||y|^2 \qquad (0 \leq x \leq \mathrm{d}_0,\ |y| \leqq \beta_0) \end{aligned}$$

が成り立つとしてよい。また

$(7, 8) \quad |\mathrm{t}^{\mathrm{A}}| \leq \mathrm{M}\mathrm{t}^{\mu} \quad (0 \leq \mathrm{t} \leq 1)$

とする。いま、

$$\|\rho\|_\alpha \leq \theta \leq \min(\beta_0, 1)$$

をみたす $\varphi \in \mathrm{B}(\alpha, 1) = \mathrm{C}([0, \alpha])$ の全体を Ω とする。$\varphi \in \Omega$ にたいして $\mathrm{T}\varphi$ を評価すると、次のようになる。

$$(7, 9)\quad \begin{aligned} |\mathrm{T}\varphi(x)| &\leqq \mathrm{M}\int_0^x \left(\frac{x}{\xi}\right)^{-\mu}\left[\|\mathrm{f}_0\|\omega_0(\xi) + \|\hat{\mathrm{A}}\|\omega_1(\xi)\theta + \|\mathrm{f}\|\theta^2\right]\xi^{-1}d\xi \\ &\leqq \mathrm{M}\left[\|\mathrm{f}_0\|\mathrm{J}_\mu\omega_0(x) + \|\hat{\mathrm{A}}\|\mathrm{J}_\mu\omega_1(x)\theta + \frac{1}{\mu}\|\mathrm{f}\|\theta^2\right]。 \end{aligned}$$

$\mathrm{J}_\mu\omega_0(0) = \mathrm{J}_\mu\omega_1(0) = 0$ であるから、θ を充分小さくとり、しかるのちに α を充分小さくとって、

$$\frac{\mathrm{M}}{\mu}\|\mathrm{f}\|\theta \leq \frac{1}{3},\quad \mathrm{M}\|\mathrm{f}_0\|\,\|\mathrm{J}_\mu\omega_0\|_\alpha \leqq \frac{\theta}{3},\quad \mathrm{M}\|\hat{\mathrm{A}}\|\,\|\mathrm{J}_\mu\omega_1\|_\alpha \leq \frac{\theta}{3}$$

ととれば、（7，9）の左辺 $\leq \theta$ となる。不動点定理を適用すれば、α, θ をこのようにとれば、Ω のなかに積分方程式（7，6）の解が少なくともひとつ存在することがわかり、ふたたび方程式を用いれば、

$$\|\varphi\|_{\alpha, \mathrm{J}_\mu\omega_0} \leqq \frac{\mathrm{M}\|\mathrm{f}_0\|}{1 - \mathrm{M}\|\tilde{\mathrm{A}}\|\,\|\mathrm{J}_\mu\omega_0\|_\alpha - \|\mathrm{f}_2\|\theta/\mu}$$

という形の評価もえられる。

補題2. 方程式

$$(7,10)\qquad x\frac{dy}{dx}=A(x)y$$

にたいして、仮定 (H_1) が成り立つとき、

$$(7,11)\qquad y=P(x)z$$

の形の変換で (7,10) を

$$(7,3)\qquad x\frac{dz}{dx}=-Az$$

に変換することができる。ただし、

$$P(x)\in B(\alpha, J_0\omega_1),\quad P(0)=I$$

である。

証明、$P(x)$ がみたすべき方程式は、

$$(7,12)\qquad x\frac{dP}{dx}=-A(x)P+PA$$

である。一般性を損わず、$A=\mathrm{diag}[\lambda_1,\ \lambda_2]$ であるとし、$A(x)$ の成分を

$$(7,13)\qquad A(x)=\begin{bmatrix}\lambda_1+a_{11}(x) & a_{12}(x)\\ a_{21}(x) & \lambda_2+a_{22}(x)\end{bmatrix}$$

とする。求める$P(x)$ の成分を

$$(7,14)\qquad P(x)=\begin{bmatrix}P_{11}(x) & P_{12}(x)\\ P_{21}(x) & P_{22}(x)\end{bmatrix}$$

$$(7,12)_{11}\quad \dot{P}_{11}=-a_{11}P_{11}-a_{12}P_{21},$$
$$(7,12)_{21}\quad \dot{P}_{21}=-a_{21}P_{11}-(\lambda_2-\lambda_1+a_{22})P_{21},$$
$$(7,12)_{12}\quad \dot{P}_{12}=-(\lambda_1-\lambda_2+a_{11})P_{12}-a_{12}P_{22},\qquad \left(\cdot=x\frac{x}{dx}\right)$$
$$(7,12)_{22}\quad \dot{P}_{22}=-a_{21}P_{12}-a_{22}P_{22}.$$

$q=P_{21}/P_{11}$ にたいする方程式は、$(7,12)_{11}$ と $(7,12)_{21}$ から

$$(7,15)_1\qquad x\frac{dq}{dx}=-a_{21}-(\lambda_2-\lambda_1)q+a_{12}q^2$$

となる。ここで$a_{21}\in B(\alpha,\omega_1)$, $a_{21}(0)=0$ を仮定しており、Re ($\lambda_2-\lambda_1$)$=0$ であるから、$(7,15)_1$ は、$B(\alpha, J_0\omega_1)$ の中に$q(0)=0$ をみたす解をもつことはみやすい、これを再び $(7,12)_{11}$ に代入すると、

$$(7,16)_1\qquad \dot{P}_{11}=-a_{11}P_{11}-a_{12}qP_{11}=(-a_{11}-a_{12}q)P_{11}$$

となる。これを求積法で解くと

$$(7,17)_1\qquad P_{11}(x)=\exp\left[-\int_0^x (a_{11}+a_{12}q)\xi^{-1}d\xi\right]$$

となり、$P_{11}\in B(\alpha, J_0\omega_1)$, $P_{11}(0)=1$ が得られる。これから、$P_{21}=qP_{11}\in B(\alpha, J_0\omega_1)$, $P_{21}(0)=0$ がえられる。$(7,12)_{12}$, $(7,12)_{22}$ の組についても同様にして $P(x)\in B(\alpha, J_0\omega_1)$, $P(0)=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$が得られる。

補題3． 方程式

(7.18)　$x\dfrac{dy}{dx}=-Ay+g(x, y)$

は、(H_1), (H_2) と同様の仮定をみたすとき、

(7,19)　$y=z+p(x, z)$

という形の変換で、(7, 3) に帰着する。ただし、$p(x, z)$ は、充分小さな α, γ にたいして $A^2(\alpha, J^\mu\omega, \gamma)$ に属するようにできる。

証明、$p(x, z)$ が満たすべき方程式は、

(7,20)　$-Az+\left[x\dfrac{\partial}{\partial x}-\langle Az, \dfrac{\partial}{\partial z}\rangle\right]p=-Az-Ap+g(x, z+p)$

である。かんたんのためにAは対角化されているとする。

(7,21)　$p(x, z)=\sum_{2\leq|k|}p_k(x)z^k$

を形式級数とみて (7,20) に代入し、z^k の係数を比較すれば、次が得られる。

$$(7,22)_k\quad \left[x\frac{d}{dx}+A-\langle k, \lambda\rangle\right]p_k=h_k,$$

$$\langle k, \lambda\rangle=k_1\lambda_1+k_2\lambda_2,$$

$$h_k=\begin{bmatrix}h_{1k}(x)\\h_{2k}(x)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}H_k(g_{1l}(x),\ p_{1J}(x),\ p_{2J}(x))\\H_k(g_{2l}(x),\ p_{1J}(x),\ p_{2J}(x))\end{bmatrix}$$

が得られる。$(7,22)_k$ を k の順序で順次解いて $p_k(x)$ を定める。その際、$0<\alpha\leqq\alpha_0$ なる正の径数 α を固定して、次の境界条件で解く。

$$(7,23)_k\quad p_{lk}(\alpha)=-\frac{h_{lk}(0)}{\lambda_{lk}}$$

また、$(7,22)_k$ の g_{1l}, g_{2l} は、$g(x, y)$ を

$$g(x, y)\sum_{2\leq|J|}g_l(x)y^l,\quad g_l(x)=\begin{bmatrix}g_{1l}(x)\\g_{2l}(x)\end{bmatrix}$$

と展開したときの係数であることはいうまでもない。

〔第1段階〕　k にかんする帰納法によって、$h_k(x)$ および $p_k(x)$ が $B(\alpha)$ に属して、

$$(7,24)_k\quad p_{lk}(0)=\frac{h_{lk}(0)}{\lambda_{lk}}$$

をみたすこと、および不等式

$$(7,25)_k\quad \|p_{lk}\|_\alpha\leqq\frac{1}{(|k|-1)\mu}\|h_{l,k}\|_\alpha$$

をみたすことを確める。

まず、$|j|<|k|$ なる j にたいして p_{lj} が $(7,23)_J$, $(7,24)_J$, $(7,25)_J$ をみたすようにB(α) の中に決まっているとすれば、$h_{l,k}(x)$ は明らかに B(α) に属す。(ここで、

$(7,26)_k$　$h_{lk}(0)=H(g_{ll}(0),\ p_l(0))$

に注意。) したがって、問題 $(7,22)_k$, $(7,23)_k$ は、解 $p_k(x)$ を一意に定め、この解は、

$$(7,27)_k\quad p_{lk}(x)=-\frac{h_{kl}(0)}{\lambda_{lk}}\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\lambda_{lk}}-\int_x^\alpha\left(\frac{x}{\xi}\right)^{\lambda_{lk}}h_{lk}(\xi)\xi^{-1}d\xi$$

のように積分表示される。この積分表示から、$\mathrm{Re}\,\lambda_{lk}=\mu(|k|-1)$ に注意すれば、(7, 25)$_k$ は容易に証明できる。

こうして決まった $\mathrm{p}_k(x)$ にたいして、級数

(7, 28)　$\sum \|\mathrm{p}_{lk}\|_\alpha z^k \quad l=1,\ 2$

の収束半径が正であることは、優級数法によって証明することができる。

じっさい、

$$\mathrm{M} \geq \max\left(1,\ \frac{1}{\mu}\right)$$

ととって、方程式

(7, 29)　$y_l = z_l + \mathrm{M} \sum_{2\leq|l|} \|\mathrm{g}_{l,l}\|_\alpha y^l, \quad l=1,\ 2$

を考える。これは、非負係数 η_{lk} をもち収束半径正の級数解

(7, 30)　$y_l = z_l + \sum_{2\leq|k|} \overline{\eta}_{lk} z^k, \quad l=1,\ 2$

をもつ。係数は

(7, 31)$_k$　$\overline{\eta}_{lk} = \mathrm{H}_k(\mathrm{M}\|\mathrm{g}_{ll}\|_\alpha,\ \overline{\eta}_j)$

$$= \mathrm{MH}_k^k(\|\mathrm{g}_{ll}\|_\alpha,\ \overline{\eta}_j)$$

によって決まる。(7, 25)$_k$, (7, 29), (7, 31)$_k$ を比較すれば、k についての帰納法により

(7, 32)$_k$　$\|\mathrm{p}_{lk}\|_\alpha \leqq \overline{\eta}_{lk}$

が得られる。じっさい、$|k|=2$ のときは、$h_{lk}=\mathrm{g}_{lk}$ であり、(7, 25)$_k$ より、

$$\|\mathrm{p}_{lk}\|_\alpha \leq \frac{\|\mathrm{g}_{lk}\|_\alpha}{\mu}$$

となる。一方 (7, 31)$_k$ より、$\overline{\eta}_{lk}=\mathrm{M}\|\mathrm{g}_{ll}\|_\alpha$ となる。ゆえに、Mのとり方から、(7, 32)$_k$ が成り立つ。$2\leq|\mathrm{j}|\leq|k|$ なる j にたいして (7, 32)$_j$ が成り立っていたとすれば、(7, 32)$_k$ は、次のように証明できる。

$$\begin{aligned}
|h_{lk}(x)| &= |\mathrm{H}_k(\mathrm{g}_{ll}(x),\ \mathrm{p}_{1j}(x),\ \mathrm{p}_{2j}(x))| \\
&\leq \mathrm{H}_k(|\mathrm{g}_{ll}(x)|,\ |\mathrm{p}_{1j}(x)|,\ |\mathrm{p}_{2j}(x)|) \\
&\leq \mathrm{H}_k(\|\mathrm{g}_{ll}\|_\alpha,\ \|\mathrm{p}_{1j}\|_\alpha,\ \|\mathrm{p}_{2j}\|_\alpha) \\
&\leq \mathrm{H}_k(\|\mathrm{g}_{ll}\|_\alpha,\ \eta_{1j},\ \eta_{2j}) \\
&= \frac{1}{\mathrm{M}}\eta_{lk},
\end{aligned}$$

ゆえに

$$\|\mathrm{p}_{lk}\|_\alpha \leq \frac{1}{\mu(|k|-1)} \|h_{lk}\|_\alpha \leq \eta_{lk}$$

級数 (7, 28) が、したがって (7, 21) が収束することがこれでいえたわけであるが、これが偏微分方程式 (7, 20) の解であることをいうためには、項別微分の可能性を確かめておく必要がある。z についての微分は問題がない。x についての微分は、$\|x\dfrac{\mathrm{dp}_k}{\mathrm{d}x}\|_\alpha$ を遂次評価するのが正攻法であろうが、ここでは、より簡明な方法をとることにしょう。すなわち、$\mathrm{N}=2,\ 3,\ \cdots\cdots$ にたいして、

(7,33)　$p^N(x,z)=\sum_{|k|\le N} p_k(x)z^k$

と定義する。このとき、p^N は

(7,34)　$x\dfrac{\partial}{\partial x}p_N=\left[-A+\langle Az,\dfrac{\partial}{\partial z}\rangle\right]p^N+h^N(x,z),$

$h^N(x,z)=\sum_{|k|\le N} h_k(x)z^k$

ただし、

$$h(x,z)=\sum_{2\le|k|} h_k(x)z^k=g(x,p(x,z))$$

z をとめつつ $N\to+\infty$ とすれば、(7,34) の右辺は $\left[-A+\langle Az,\dfrac{\partial}{\partial z}\rangle\right]p+g(x,p(x,z))$

に $0\le x\leqq\alpha$ 上で一様に収束する。ゆえに $x\dfrac{\partial}{\partial x}p$ は $x\dfrac{\partial}{\partial x}p_N$ の極限として存在し、した

がってまた、(7,20) も成り立つわけである。

〔第2段階〕　第1段階では、$g\in A^{(2)}(\alpha_0,1;\beta)$ だけを用いて $p\in A^{(2)}(\alpha,1;\gamma)$ を求めた。一般的には、$p(x,z)$ は α のとり方に依存する。ここでは、α を充分小さくとれば、$p(x,z)$ は $A^{(2)}(\alpha,J^\mu\omega,\gamma)$ に属することを示す。

(7,35)　$\hat{p}_{lk}=p_{lk}-p_{lk}(0)$

とおいて、$\|\hat{p}_{lk}\|_{J^\mu\omega}$ を評価しよう。いま α は充分小さくとって

(7,36)　$\|\omega\|_\alpha+\|J^\mu\omega\|_\alpha\leqq 1$

となるようにしておく。$\omega(0)=0$ および

$$\|J^\mu\omega\|_\alpha\leqq\frac{1}{\mu}\|\omega\|_\alpha$$

よりこれは可能である。並行して

(7,37)　$\hat{h}_{lk}=h_{lk}-h_{lk}(0)$

$\hat{g}_{lk}=g_{lk}-g_{lk}(0)$

とおく。k にかんする帰納法によって

(7,38)　$p_{lk}(0)=-\dfrac{h_{lk}(0)}{\lambda_{lk}}$

(7,39)　$\hat{h}_{lk}(x)=\hat{H}_k(g_{li}(0),\ p_j(0),\hat{g}_{li}(x),\hat{p}_j(x))$

(7,40)　$\|\hat{p}_{lk}\|_{J^\mu\omega}\leqq\begin{cases}\|\hat{g}_{lk}\|_w &)\ |k|=2)\\ \left(\dfrac{1}{(|k|-2)\mu+1}+1\right)\|\hat{h}_{lk}\|_{\omega+J^\mu\omega} & (|k|>2)\end{cases}$

(7,41)　$\|\hat{h}_{lk}\|_{\omega+J^\mu\omega}\leqq\hat{H}_k(|g_{li}(0)|,|p_j(0)|;\|\hat{g}_{li}\|\omega,\|\hat{p}_l\|_{J^\mu\omega})$

を証明する。

ここに $\hat{H}_k$ は、

$\hat{H}_k(X_l,x_{1j},x_{2j};D_l,d_{1j},d_{2j})$

$=H_k(X_l+D_l,x_{1j}+d_{1j},x_{2j}+d_{2j})-H_k(X_l,x_{1j},X_{2j})$

で定義されるものであって、H_k は第1段階ですでに用いた

$$\mathrm{H}_k(\mathrm{X}_l, x_{1j}, x_{2j}) = \sum_{\sum_{r=1}^{l1} j(r) + \sum_{s=1}^{l2} j'(s) = k} \mathrm{X}_l \prod_{r=1}^{l1} x_{1j(r)} \prod_{s=1}^{l2} x_{2j'(s)}$$

に他ならない。

まず、(7,38) は、解を表示 (7,27) から Lebesgue の収束定理を用いて容易に導くことができる。この結果として (7,27) は、

$$(7,27)'_k \quad \hat{\mathrm{p}}_{l,k}(x) = -\int_x^\alpha \left(\frac{x}{\xi}\right)^{\lambda_{lk}} \hat{h}_{lk}(\xi)\xi^{-1}d\xi$$

と書きなおすことができる。(7,38) から (7,39) が直ちに得られる。(7,27)′ から、$|k|=2$ のときは $\hat{h}_{lk} = \hat{\mathrm{g}}_{lk}$ であるから

$$\begin{aligned} |\hat{\mathrm{p}}_{lk}(x)| &\leqq \int_x^\alpha \left(\frac{x}{\xi}\right)^\mu \|\hat{\mathrm{g}}_{lk}\|_\omega \omega(\xi)\xi^{-1}d\xi \\ &= \|\hat{\mathrm{g}}_{lk}\|_\omega \mathrm{J}^\mu \omega(x) \end{aligned}$$

のようにして (7,40) が得られる。(7,41) は帰納法の仮定、$\mathrm{p}_j \in \mathrm{B}(\alpha, \omega^\mu)$ より、次のようにして得られる。

$$\begin{aligned} |\hat{h}_{lk}(x)| &= |\hat{\mathrm{H}}_k(\mathrm{g}_{li}(0), \mathrm{p}_j(0); \hat{\mathrm{g}}_{li}(x), \hat{\mathrm{p}}_j(x)) \\ &\leqq \hat{\mathrm{H}}_k(|\mathrm{g}_{li}(0)|, |\mathrm{p}_j(0)|; |\hat{\mathrm{g}}_{li}(x)|, |\hat{\mathrm{p}}_j(x)|) \\ &\leqq \hat{\mathrm{H}}_k(|\mathrm{g}_{li}(0)|, |\mathrm{p}_j(0)|; \|\hat{\mathrm{g}}_{li}\|_\omega \omega(x), \|\hat{\mathrm{p}}_j\|_{\mathrm{J}^\mu\omega}\mathrm{J}^\mu\omega) \\ &\leqq (\omega + \mathrm{J}^\mu\omega)\hat{\mathrm{H}}_k(|\mathrm{g}_{ki}(0)|, |\mathrm{p}_j(0)|; \|\hat{\mathrm{g}}_{li}\|_\omega, \|\hat{\mathrm{p}}_j\|_{\mathrm{J}^\mu\omega}) \end{aligned}$$

この最後では、(7,36) を用いた。

(7,40), (7,41) を利用して、級数

$$(7,42) \qquad \sum \|\hat{\mathrm{p}}_{lk}\|_{\mathrm{J}^\mu\omega} z^k$$

の収束を優級数法で証明しよう。考えを決めるために、

$$\mathrm{M} = 1 + \frac{1}{\mu}$$

と決めて、方程式

$$(7,43) \qquad y_l = z_l + \mathrm{M} \sum_{2 \leq |i|} |\mathrm{g}_{li}(0)| z^i, \quad l = 1,\ 2$$

の収束解を

$$(7,44) \qquad y_l = z_l + \sum_{2 \leq |k|} \eta^0{}_{lk} z^k, \quad l = 1,\ 2$$

とする。このとき、

$$\begin{aligned} (7,45) \qquad \eta^0{}_{lk} &= \mathrm{H}_k(\mathrm{M}|\dot{\mathrm{g}}_{li}(0)|,\ \eta^0_j) \\ &= \mathrm{MH}_k(|\mathrm{g}_{li}(0)|, \eta^0_j) \end{aligned}$$

が成り立ち、(7,38) から

$$(7,46) \qquad |\mathrm{p}_{lk}(0)| \leq \eta^0_{lk}$$

が成り立つ。

一方、

$$(7,47) \qquad y_l = z_l + \mathrm{M} \sum_{2 \leq |i|} (|\mathrm{g}_{li}(0)| + \|\hat{\mathrm{g}}_{li}\|_\omega) y^i, \quad l = 1,\ 2$$

の収束解を

(7, 48)　$y_l = z_l + \sum_{2 \leq |k|} \eta_{lk} z^k$

とする。係数η_{lk} は

(7, 49)　$\eta_{lk} = \mathrm{MH}_k(|\mathrm{g}_{ll}(0)| + \|\hat{\mathrm{g}}_{ll}\|_\omega, \eta_l)$

で決まる。それゆえ、級数

(7, 50)　$\sum \hat{\eta}_{lk} z^k$;　$\hat{\eta}_{lk} = \eta_{lk} - \eta^0_{lk}$

の収束半径は正である。((7, 48) の収束半径を下まわらない。) (7, 45) および (7, 49) より

(7, 51)　$\hat{\eta}_{lk} = \mathrm{M}\hat{\mathrm{H}}_k(|\mathrm{g}_{ll}(0)|, \eta^0_j; \|\hat{\mathrm{g}}_{ll}\|_\omega, \hat{\eta}_j)$

が成り立つ。(7, 51) と (7, 40), (7, 41) とを比較すれば、

(7, 52)　$\|\hat{\mathrm{p}}_{lk}\|_{\mathrm{J}^\mu\omega} \leq \hat{\eta}_{lk}$

がみやすい。ゆえに (7, 50) が (7, 42) の優級数となるわけである。したがって、あるγ について、

$$\hat{\mathrm{p}}(x, z) = \sum \hat{\mathrm{p}}_l(x) z^l = \mathrm{p}(x, z) - \mathrm{p}(0, z)$$

は$\mathrm{A}^{(2)}(\alpha, \mathrm{J}^\mu\omega, \gamma)$ に属する。

準備定理の証明

まず、補題1によって存在が保証された (7, 1) の解$y = \varphi^s(x) \in \mathrm{B}(\alpha^s, \mathrm{J}_\mu\omega_0)$ をひとつ選び、変数変換

(7, 53)　$y = \varphi^s(x) + \bar{y}$

を行なう。これによりえられる方程式は、

(7, 54)　$$x\frac{d\bar{y}}{dx} = \bar{\mathrm{f}}(x, \bar{y}) = -\bar{\mathrm{A}}(x)\bar{y} + \bar{\mathrm{f}}_2(x, \bar{y})$$

となる。簡単な計算により、次が成り立つことがわかる。

(7, 55)　$\bar{\mathrm{A}}(x) \in \mathrm{B}(\bar{\alpha}, \omega_1 + \mathrm{J}_\mu\omega_0)$,　$\bar{\mathrm{A}}(0) = \mathrm{A}$

$\bar{\mathrm{f}}_2(x, \bar{y}) \in \mathrm{A}^{(2)}(\bar{\alpha}, \omega_2 + \mathrm{J}_\mu\omega_0; \bar{\beta})$,

$\bar{\mathrm{f}}_2(0, \bar{y}) = \mathrm{f}_2(0, \bar{y})$

次に、補題2によって、(7, 54) の線型部分

(7, 54)$_\mathrm{L}$　$$x\frac{d\bar{y}}{dx} = -\bar{\mathrm{A}}(x)\bar{y}$$

を

(7, 56)$_\mathrm{L}$　$$x\frac{d\bar{\bar{y}}}{dx} = -\mathrm{A}\bar{\bar{y}}$$

に変換する変換

(7, 57)　$\bar{y} = \mathrm{p}(x)\bar{\bar{y}}$

を見出す。ただし、こんどは、

(7, 58)　$$\mathrm{p}(x) \in \mathrm{B}(\bar{\alpha}, \mathrm{J}_0(\omega_1 + \mathrm{J}_\mu\omega_0)) = \mathrm{B}(\bar{\alpha}, \mathrm{J}_0\omega_0 + \mathrm{J}_0\omega_1),$$

$$P(0)=I$$

である。(7,57) によって、(7,54) は

(7,59) $$x\frac{d\bar{\bar{y}}}{dx}=\bar{\bar{f}}(x,\bar{\bar{y}})$$

$$=-A\bar{\bar{y}}+g(x,\bar{\bar{y}})$$

に変換される。(7,59) の2次以上の項 g は

(7,60) $$g(x,\bar{\bar{y}})=p(x)^{-1}\bar{f}_2(x,p(x)\bar{\bar{y}})$$

と決まるから、

(7,61) $$g\in A^{(2)}(\bar{\bar{\alpha}},J_0\omega_0+J_0\omega_1+\omega_2+J_\mu\omega_0;\bar{\bar{\beta}})$$
$$=A^{(2)}(\bar{\bar{\alpha}},J_0\omega_0+J_0\omega_1+\omega_2;\bar{\bar{\beta}})$$

となる。

(7,62) $$g(0,\bar{\bar{y}})=f(0,\bar{\bar{y}})$$

に注意しよう。

最後に補題3を用いると、

(7,63) $$\bar{\bar{y}}=z+\bar{\bar{p}}(x,z)$$

の変換で、(7,59) は

(7,3) $$x\frac{dz}{dx}=-Az$$

に帰着し、$\bar{\bar{p}}(x,z)$ は、

$$A^{(2)}(\alpha,J^\mu[J_0\omega_0+J_0\omega_1+\omega_2];\gamma)$$
$$=A^{(2)}(\alpha,J^\mu\omega_0+J^\mu\omega_1+J_0\omega_0+J_0\omega_1+J^\mu\omega_2;\gamma)$$

に属す。(7,53), (7,57), (7,63) ひきつづけて行って得られる変換

$$\begin{aligned}y&=\varphi^s(x)+\bar{y}\\&=\varphi^s(x)+P(x)\bar{\bar{y}}\\&=\varphi^s(x)+P(x)[z+\bar{\bar{p}}(x,z)]\\&=\varphi^s(x)+P(x)z+P(x)\bar{\bar{p}}(x,z)\\&\equiv p(x,z)\end{aligned}$$

は、(7,1) を (7,3) に還元し、かつ、定理の主張する性質 (P_0), (P_1), (P_2) をもつ。

証明おわり。

参考文献

〔1〕 S. Chandrasekhar, An Introduction to the Study of Stellar Structure, Univ. of Chicago Press, 1939.

〔2〕 D. D. Joseph and T. S. Lundgren, Quasilinear Dirichlet problems driven by positive sources, Arch. Rational Mech. Anal., 49 (1972/73), 241-269.

〔3〕 亀高惟倫・牧野哲, $\frac{d^2y}{dr^2}+\frac{n-1}{r}\frac{dy}{dr}+\lambda e^{u}=0$ について, 数理解析研講究録, No. 315, 99-135.

〔4〕 T. Makino, On the existence of positive solutions at infinity for ordinary differential equations of Emder type, Funkc. Ekv. 27 (1984), 319-329.

〔5〕 C. W. Misner, K. S. Thorne, J. A. Wheeler, Gravitation, 1973, Freeman.

〔6〕 S. Yabushita, On the structure and stadility of a polytrope with an isothermal core, Mon. Not- Royal Astronomical Soc., 172 (1975), 441-453.